

Opción A

Modelo5 Ejercicio 1 Opción A sobrantes 1996

Sea $f : [-4,2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^x$

(a) [1 punto]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) [1'5 puntos]. Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos de f .

Solución

a)

$f : [-4,2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Para ver el crecimiento y decrecimiento estudiamos la primera derivada $f'(x)$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$$

$f'(x) = 0$, no dá $(2x + x^2) = 0$ puesto que e^x nunca se anula al ser una exponencial

De $2x + x^2 = 0 = x(2 + x)$ obtenemos $x = 0$ y $x = -2$ que son los posibles máximos o mínimos relativos

Como $f'(-3) = (+)(-6+9) > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-4,-2)$

Como $f'(-1) = (+)(-2+1) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-2,0)$

Como $f'(1) = (+)(2+1) > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,2)$

Por definición $x = -2$ es un máximo relativo y $x = 0$ es un mínimo relativo

b)

Ya sabemos que $x = -2$ es un máximo relativo que vale $f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \cong 0'54$

Análogamente $x = 0$ es un mínimo relativo que vale $f(0) = 0 \cdot 1 = 0$

Los máximos y mínimos absolutos se encuentran en las soluciones de $f'(x) = 0$, los extremos del intervalo, y los puntos de discontinuidad y no derivabilidad que no hay ninguno pues la función dada es continua y derivable en todo \mathbb{R} por producto de continuas y derivables, en concreto x^2 y e^x . Por tanto los posibles máximos o mínimos absolutos se encuentran en las abscisas -4 , -2 , 0 y 2 . El valor mas grande será el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

$$f(-4) = 16 \cdot e^{-4} \cong 0'29$$

$$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \cong 0'54$$

$$f(0) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$f(2) = 4 \cdot e^2 \cong 29'56$$

Por tanto el mínimo absoluto es 0 y se alcanza en $x = 0$ y el máximo absoluto es $4 \cdot e^2$ y se alcanza en $x = 2$.

Modelo5 Ejercicio 2 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos] Sabiendo que $\int_{+1}^{+5} f(x) dx = 3$, $\int_{+1}^{+5} g(x) dx = 3$, $\int_{+1}^{+3} f(x) dx = 3$, $\int_{+3}^{+5} g(x) dx = 3$, calcula

$$\int_{+3}^{+5} [f(x) + 3g(x)] dx - \int_{+1}^{+3} [3f(x) + g(x)] dx.$$

Solución

Conocemos $\int_{+1}^{+5} f(x) dx = 3$, $\int_{+1}^{+5} g(x) dx = 3$, $\int_{+1}^{+3} f(x) dx = 3$, $\int_{+3}^{+5} g(x) dx = 3$

Por las propiedades de las integrales $\int_{+1}^{+5} f(x) dx = \int_{+1}^{+3} f(x) dx + \int_{+3}^{+5} f(x) dx$. Sustituyendo tenemos

$$3 = 3 + \int_{+3}^{+5} f(x) dx, \text{ de donde } \int_{+3}^{+5} f(x) dx = 0$$

Por las propiedades de las integrales $\int_{+1}^{+5} g(x) dx = \int_{+1}^{+3} g(x) dx + \int_{+3}^{+5} g(x) dx$. Sustituyendo tenemos

$$3 = \int_{+1}^{+3} g(x) dx + 3 \text{ de donde } \int_{+1}^{+3} g(x) dx = 0$$

Respondemos ya a la pregunta formulada

$$\int_{+3}^{+5} [f(x) + 3g(x)] dx - \int_{+1}^{+3} [3f(x) + g(x)] dx =$$

$$= \int_{+3}^{+5} f(x) dx + 3 \int_{+3}^{+5} g(x) dx - 3 \int_{+1}^{+3} f(x) dx - \int_{+1}^{+3} g(x) dx = 0 + 3(3) - 3(3) - 0 = 0$$

Modelo5 Ejercicio 3 Opción A sobrantes 1996

Sean S y S' dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.

(a) [1 punto]. Justifica con un ejemplo que S puede ser compatible y S' incompatible

(b) [1 punto]. Si los dos sistemas S y S' son compatibles, ¿puede S tener solución única y S' tener infinitas soluciones? Razona la respuesta.

(c) [0'5 puntos] Al resolver un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas mediante el método de eliminación de Gauss, obtenemos la siguiente matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

¿Qué puedes decir de dicho sistema? Razona la respuesta.

Solución

a)

El sistema $S \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ y el sistema $S' \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ tienen ambos la misma matriz de los

coeficientes, sin embargo el sistema S es compatible e indeterminado y el S' es incompatible.

b)

Si S y S' son compatibles tenemos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = \text{rango}(A') = \text{rango}(A'^*)$, siendo A y A* la matriz de los coeficientes y ampliada del sistema S, y A' y A'* la matriz de los coeficientes y ampliada del sistema S', por tanto ambos tendrán solución única o tendrán infinitas soluciones

c)

Observando la 4ª fila nos da lugar a la ecuación $0 \cdot z = 1$, es decir $0 = 1$ lo cual es imposible y el sistema es incompatible.

Modelo5 Ejercicio 4 Opción A sobrantes 1996

El ángulo entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} es de 120° y se sabe que el módulo de \mathbf{u} es 5 y el de \mathbf{v} es 3.

(a) [1'5 puntos]. Determina el valor del número real α para el que los vectores $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ y $(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})$ son ortogonales.

(b) [1 punto]. ¿Cuánto vale el módulo de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

Solución

a)

$$\|\mathbf{u}\| = 5; \|\mathbf{v}\| = 3; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 120^\circ$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 5 \cdot 3 \cdot \cos(120^\circ) = 15 \cdot (-1/2) = -15/2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 5 \cdot 5 \cdot \cos(0^\circ) = 25 \cdot (1) = 25$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 3 \cdot 3 \cdot \cos(0^\circ) = 9 \cdot (1) = 9$$

Si los vectores $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ y $(\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v})$ son ortogonales, su producto escalar es cero

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 = \alpha(25) - 15/2 - \alpha(-15/2) - 9. \text{ Operando nos queda } -33/2 + (65/2)\alpha = 0 \text{ cuya solución es } \alpha = 33/65$$

b)

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 25 - 2(-15/2) + 9 = 49$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \sqrt{49} = 7$$

Opción B

Modelo5 Ejercicio 1 Opción B sobrantes 1996

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ para $x \neq 2$ y $x \neq -2$

(a) [1 punto]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) [1'5 puntos]. Teniendo en cuenta cómo es la función en el intervalo [3, 4] demuestra, sin calcular la

integral, que se cumple $1/4 \leq \int_{+3}^{+4} f(x) dx \leq 3/5$

Solución

a)

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} \text{ para } x \neq 2 \text{ y } x \neq -2$$

Para estudiar su monotonía estudiamos su primera derivada $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}; f'(x) = 0 \text{ de donde } x = 0 \text{ que será el posible máximo o mínimo relativo}$$

Como $f'(-1) = (6)(+) > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) - \{-2\}$

Como $f'(1) = (-6)(+) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, +\infty) - \{+2\}$

Por definición $x = 0$ es un máximo relativo.

Esta función tiene dos asíntotas verticales precisamente en $x = 2$ y $x = -2$

b)

El Teorema del valor medio para las integrales nos dice que si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \text{ siendo } m \text{ y } M \text{ el mínimo y máximo absoluto de } f(x) \text{ en } [a, b]$$

En nuestro caso como $f(x)$ es estrictamente decreciente en $[3, 4]$, por serlo en $(0, +\infty) - \{+2\}$ resulta que:

$f(4) = 3/12 = 1/4$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ en $[3, 4]$

$f(3) = 3/5$ es el máximo absoluto de $f(x)$ en $[3, 4]$

$$(b - a) = (4 - 3) = 1$$

Aplicándole el Teorema del valor medio para integrales tenemos $1/4 \leq \int_3^4 f(x) dx \leq 3/5$

Modelo5 Ejercicio 2 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Una vía de ferrocarril transcurre por un terreno llano de manera que su trazado coincide con el de la recta $y = 1$ para $x \leq 0$. A partir del punto $x = 0$ su trazado coincide con el de la curva $y = (ax + b)e^{-x}$. Sabiendo que el trazado de la vía admite recta tangente en todos sus puntos, ¿cuánto valen a y b ?

Solución

La función que me han dado es $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (ax + b)e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como me dicen que admite recta tangente en todos sus puntos me están diciendo que es derivable en \mathfrak{R} y como consecuencia también es continua en \mathfrak{R} . En particular es continua y derivable en el punto $x = 0$

Como $f(x)$ es continua en $x = 0$ tenemos que:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b)e^{-x} = (0 + b) \cdot 1 = b. \text{ Igualando tenemos que } b = 1$$

Al ser $f(x)$ derivable en \mathfrak{R} tenemos que $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot e^{-x} + (ax + 1)e^{-x}(-1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como es derivable en $x = 0$, $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [a \cdot e^{-x} + (ax + 1)e^{-x}(-1)] = a + 1(-1). \text{ Igualando}$$

$$a - 1 = 0, \text{ de donde } a = 1$$

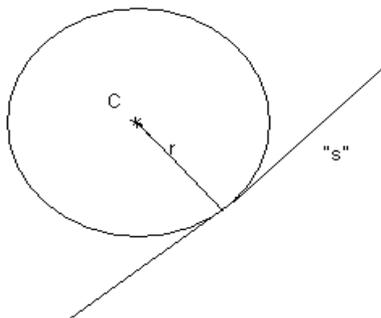
Modelo5 Ejercicio 3 Opción B sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. ¿Es posible determinar una circunferencia conocido su centro y una de sus rectas tangentes? Justifica la respuesta.

(b) [1 punto]. Calcula el radio de una circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, -1)$ sabiendo que la recta de ecuación $2x + y = 4$ es tangente en uno de sus puntos.

Solución

a)



Si conocemos el centro C y una de las rectas tangentes "s" a la circunferencia podemos calcular el radio de la circunferencia r como la distancia del centro a la recta "s", puesto que el radio es perpendicular a todas las rectas tangentes a la circunferencia.

b)

Centro C(1,-1)

Recta tangente "s" $\equiv 2x + y - 4 = 0$. Su vector normal es $\mathbf{n} = (2,1)$

$$\text{El radio es } r = d(C, "s") = \frac{|2(1) + (-1) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

La ecuación de la circunferencia es $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1/5$

Modelo5 Ejercicio 4 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Dados los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x + 2z = 3$, $\pi_2 \equiv 3x + y + z = -1$, $\pi_3 \equiv 2y - z = -2$, y $\pi_4 \equiv x - y + \lambda z = -5$, determina el valor de λ para el que los cuatro planos tienen un solo punto común y calcula dicho punto.

Solución

Los cuatro planos se pueden considerar como cuatro ecuaciones con tres incógnitas

$$x + 2z = 3$$

$$3x + y + z = -1$$

$$2y - z = -2$$

$$x - y + \lambda z = -5$$

Para que el sistema tenga solución única $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, siendo A la matriz de los coeficientes y A^* la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{En A como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1-2) + 0 + 2(6-0) = -3 + 12 = 9 \neq 0, \text{ rango}(A) = 3$$

Para que $\text{rango}(A^*) = 3$, $\det(A^*)$ tiene que ser cero

$$\det(A^*) = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a F + 1^a F(-3) \\ \\ 4^a F + 1^a F(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 & -18 \end{vmatrix} = [\text{Por adjuntos } 1^a \text{ columna}]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a F + 1^a F(-2) \\ 3^a F + 1^a F(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & \lambda - 7 & -18 \end{vmatrix} = [\text{Por adjuntos } 1^a \text{ columna}]$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ \lambda - 7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ \lambda - 7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - \lambda + 7) = 18(-2 - \lambda) = 0, \text{ de donde } \lambda = -2 \text{ para que los cuatro plano se corten en un solo punto.}$$

Para calcular el punto de corte resolvemos el sistema determinado por los tres primeros planos

$$x + 2z = 3$$

$$3x + y + z = -1$$

$$2y - z = -2$$

$$x + 2z = 3$$

$$y - 5z = -10$$

$$2y - z = -2$$

$$3^a F + 2^a F(-2)$$

$$x + 2z = 3$$

$$y - 5z = -10$$

$$9z = 18 \text{ de donde } z = 2, y = 0 \text{ y } x = -1.$$

El punto donde se cortan los cuatro planos con $\lambda = -2$ es $(x,y,z) = (-1,0,2)$